

Perché i modelli fisici sono necessari.

Lorenzo Seno

<http://www.acustica.org>
lorenzo.seno@bigfoot.com

Centro Ricerche Musicali (<http://www.crm-music.org>)
EcOna (<http://w3.uniroma1.it/econa/>).

A partire da circa quarant'anni fa, contemporaneamente alla nascita della musica elettronica, musicisti e ricercatori si sono impegnati in un intenso sforzo sia nella sintesi sonora di strumenti musicali acustici, sia nell'invenzione, in vari modi, di nuovi strumenti.

Per analizzare i meccanismi con cui gli strumenti reali producono il suono, sono state sviluppate sia tecniche di sintesi che di analisi. In questo modo è stato possibile *analizzare* il suono di un certo strumento e riprodurlo utilizzando le corrispondenti tecniche di sintesi. Introducendo piccole variazioni nei parametri dei processi nel corso del procedimento di analisi e resintesi, si è potuto indagare sugli effetti che tali modifiche avevano sul suono percepito.

Questi studi iniziali ci hanno fornito importanti risultati nella ricerca sui meccanismi di emissione e di percezione del suono. Risset mostrò, per esempio, che quello che noi indichiamo comunemente con il termine "timbro" di una tromba, è dovuto al modo in cui le parziali si evolvono nello strumento durante la fase di attacco del suono.

Questo tipo di approccio si è presto incrociato con un altro importante campo di ricerca sui meccanismi sonori: si tratta degli storici studi condotti sull'emissione del parlato, durante le ricerche di ampio respiro condotte nei laboratori delle compagnie telefoniche, per raggiungere l'obiettivo di ridurre la larghezza di banda necessaria per le conversazioni telefoniche.

Gli studi sul parlato portarono in tempi assai brevi allo sviluppo della modellizzazione fisica del suono, in contrapposizione alla modellizzazione di segnale. La ben nota tecnica del Cepstrum, per esempio, si può considerare facente parte della famiglia dei metodi di modellizzazione di segnale, dato che utilizza proprietà intrinseche del suono del parlato. Le tecniche LPC, per contro, si basano direttamente sull'ipotesi che il parlato sia prodotto da alcune entità fisiche – un eccitatore ed una cavità risonante – e sull'idea che il conseguente modello matematico debba descrivere questi componenti ed il loro comportamento.

In questo modo, i parametri del modello sono correlati con – o per dir meglio, rappresentano direttamente – alcune quantità fisiche legate alla sorgente sonora.

Le attuali tecniche di sintesi degli strumenti musicali.

Negli strumenti musicali elettronici sono attualmente impiegate le tecniche di sintesi in FM e con le wavetable, anche se la prima è oggi, di fatto, relegata solo alla categoria più economica di strumenti. Così non è nella musica elettronica colta, che continua ancora oggi ad usare la tecnica FM per la sua notevole flessibilità nella generazione di nuovi suoni.

Il grande successo della tecnica FM è dovuto al fatto che la modulazione in frequenza permette di ottenere abbastanza facilmente suoni con spettro molto denso, formato da un numero molto alto di righe spettrali uniformemente distribuite, anche con pochi oscillatori, circostanza questa molto gradita in un'epoca in cui questi erano costosi in termini di risorse hardware e software. Controllare questi spettri densi per introdurre delle modificazioni fini (p.e. microfluttuazioni in ampiezza ed in frequenza, o lievi anarmonicità) è però tutta un'altra faccenda che può rappresentare una vera sfida per il compositore che usi la tecnica FM.

Questa è la ragione delle continue richieste di nuove tecniche di sintesi sonora. Le wavetable sono poco adottate dai compositori colti perché si limitano più che altro ad imitare dei suoni già esistenti, caratteristica certamente molto importante da un punto di vista prettamente economico, ma insoddisfacente per finalità artistiche. Sono presenti, in qualche modo, solo in una particolare tecnica di composizione, nota come "sintesi granulare", ispirata ai grani di Gabor o alle Wavelet.

Una tecnica analoga è usata attualmente nei sintetizzatori vocali di alta qualità. (Da quanto è dato di capire su caratteristiche funzionali non documentate, si direbbe sia il caso di “Actor” della casa italiana che si chiama oggi “TelecomLab”, l’ex CSELT).

Qualche anno fa, grazie soprattutto a Karplus e Strong, quindi a Julius O Smith III e Jaffe dello “Center for Computer Research in Music and Acoustics” (CCRMA) di Stanford, la sintesi per modelli fisici fece apparizione sulle scene della ricerca musicale, e fu perfino adottata in alcune apparecchiature commerciali (Yamaha e Korg).

Questi primi tentativi commerciali si sono però presto rivelati una falsa partenza, e la sintesi per modelli fisici è oggi scomparsa dal mercato. Ciò è accaduto, a mio avviso, perché quei tentativi erano ancora troppo rudimentali. Nonostante questo, la modellizzazione fisica continua ad avere un ruolo fondamentale nella ricerca sulla sintesi musicale.

I diversi approcci alla modellizzazione fisica.

Le guide d’onda sono state, storicamente, il primo approccio alla risoluzione del problema. Il cuore di qualsiasi strumento musicale melodico è rappresentato da un elemento risonante di un certo tipo (p.e. una corda, o una colonna d’aria) opportunamente eccitato in modo da divenire un oscillatore multimodale (p.e. pizzicando le corde o suonandole con l’archetto in uno strumento a corde, o in uno strumento a fiato, tramite le anse o il bocchino).

In prima approssimazione, la corda (o la colonna d’aria) può considerarsi descritta da una equazione d’onda bidimensionale, la cui forma è del tipo:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \dots$$

dove y rappresenta una determinata grandezza (p.e. lo spostamento trasversale o la velocità in una corda, la pressione in una canna, e così via...) e z rappresenta una coordinata longitudinale. Qui c è la velocità di propagazione del fenomeno ondulatorio ed è legata, nel caso della corda, alla sua tensione T ed alla sua densità lineare di massa μ :

$$c = \frac{T}{\mu}$$

E’ ben noto che una equazione di questo tipo ammette una soluzione alla D’Alembert, cioè una sovrapposizione lineare di due onde, una progressiva ed una regressiva:

$$y(z, t) = y_b(z, t) + y_f(z, t)$$

in cui le onde progressiva e regressiva sono rispettivamente:

$$y_b(z, t) = y(z + c \cdot t, 0) \quad \text{e} \quad y_f(z, t) = y(z - c \cdot t, 0)$$

e si nota che in tal modo le due componenti vengono espresse in funzione della forma iniziale della corda. In altri termini, la forma iniziale si propaga a destra ed a sinistra riflettendosi alle estremità della corda (o della canna). Queste soluzioni si adattano bene al caso della semplice equazione (1). Senza altri termini questa è una legge conservativa, caratteristica quindi di un sistema in cui l’energia si conserva, dove una perturbazione dello stato di quiete del sistema è in grado di propagarsi indefinitamente. I risonatori reali, come le canne o le corde, sono ovviamente non conservativi e quindi, al cessare della perturbazione, il suono decade più o meno rapidamente.

Ma se si considerano le corde e si effettua una misura su un solo periodo di oscillazione si può osservare che il sistema si comporta quasi conservativamente; ciò fa sperare che l’eq. (1) possa ritenersi una buona approssimazione della corda reale. Si possono forse ottenere comportamenti più fini introducendo perturbazioni relativamente piccole al moto conservativo.

Questo argomento è abbastanza complesso, come vedremo più avanti, ma ciò che ora ci proponiamo di fare è mostrare i fondamentali che stanno alla base del metodo a guida d’onda.

La prima implementazione della soluzione dell’equazione del moto alla “D’Alembert” è l’algoritmo di Karplus-Strong.

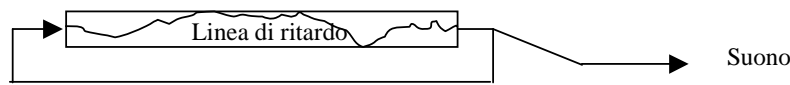


fig. 1.

Se si introduce nella linea di ritardo una generica forma d'onda e si attende che il sistema evolva, la forma iniziale si ripeterà indefinitamente con una frequenza pari all'inverso del tempo di ritardo totale della linea. In questo modo si otterrà una forma d'onda composta da una parziale fondamentale (che è quella responsabile dell'altezza percepita del suono) e da una serie di armoniche determinate dalla forma della curva iniziale.

Questo fu storicamente il primo algoritmo ad opera di Karplus & Strong. Le linee di ritardo sono facilmente implementabili nei sistemi numerici come buffer di memoria circolari. C'è solo da aggiornare un puntatore di lettura del dato memorizzato su una linea di ritardo e ciò rende l'implementazione dell'algoritmo estremamente economica in termini di costo computazionale. Si trattò, all'inizio della musica elettronica, di un risultato importante.

L'algoritmo originale di K/S possiede solo un insieme di onde che si propagano, e ciò lo rende troppo rudimentale. Tramite esso è possibile suonare, infatti, solo condizioni iniziali. Se si vogliono utilizzare eccitazioni più complesse (percussioni, pizzicati, archetto) si rende necessario un modello matematico più completo in grado di trattare anche perturbazioni tempo-varianti. Questa considerazione porta al modello a guida d'onda di fig. 2, in cui due linee di ritardo vengono usate per rappresentare due insiemi distinti di onde viaggianti.

In questo modo si può introdurre una eccitazione nel modello semplicemente aggiungendo il suo contributo ad entrambe le onde. Quando si lavora con le corde si considerano generalmente onde di velocità (dato che il suono emesso è legato alla velocità di vibrazione della corda, a causa del meccanismo di accoppiamento con l'atmosfera). Nella pratica la trasformazione di una eccitazione fisica in una perturbazione additiva della velocità può presentare delle difficoltà, ma al momento trascureremo questi aspetti puramente tecnici. Ci occuperemo ora degli inconvenienti di questo metodo che conserva in ogni caso la caratteristica più importante del suo progenitore: il basso costo computazionale.

Dei tre inconvenienti che si presentano in quest'approccio, il primo nasce dall'intrinseca conservatività del modello. Quando introduciamo nel modello una eccitazione, forniamo energia al sistema, e otteniamo quindi non solo suoni di durata infinita e ampiezza costante, ma addirittura di ampiezza infinitamente crescente (e quindi suoni di potenza infinitamente crescente) se l'eccitazione è ripetitiva.

Introdurre in qualche modo una dissipazione nel modello a guida d'onda in linea di principio non è affatto difficile, e tra un attimo mostreremo come si possa fare. A prima vista sembrerebbe dunque che questo non rappresenti un vero inconveniente, se non fosse per un piccolo problema che vi si nasconde, come mostreremo più avanti.

Per il momento occupiamoci solo di vedere come sia possibile introdurre un elemento dissipativo all'interno del modello a guida d'onda.

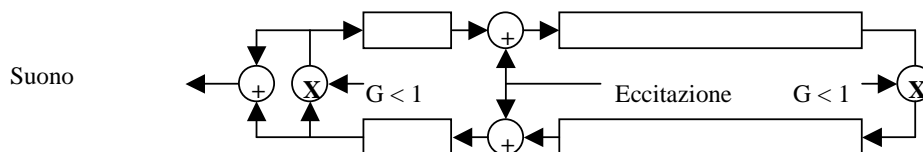


fig. 2.

Introduciamo nell'anello un elemento con guadagno minore dell'unità (per meglio dire: un'attenuazione). Così facendo, ora il suono subisce un decadimento esponenziale nel tempo. Si noti come questi elementi con guadagno siano concentrati all'estremità delle corde, in un modo molto simile a quanto si farebbe per tener conto dell'effetto di attenuazione al ponticello. La posizione esatta del blocco con il guadagno non ha particolare importanza, anche se averli messi all'estremità delle corde potrebbe indurci ad attribuire al loro posizionamento un significato fisico. Il nostro modello è completamente lineare (è costituito da blocchi di ritardo, nodi sommatore, e blocchi di guadagno), e per questo ogni blocco del sistema potrebbe commutare con qualunque altro. Questa è una caratteristica fondamentale del modello a guida d'onda: si possono spostare a piacere gli elementi del sistema senza che l'uscita si modifichi.

La commutatività è stata ampiamente sfruttata per concentrare elementi distribuiti in un singolo punto, in modo da ridurre la complessità computazionale. Illustreremo questa idea basandoci sul modello non

conservativo di cui sopra. Possiamo ottenere un'altra interpretazione del modello introducendo un ulteriore termine non conservativo, di attrito viscoso, nell'equazione di moto:

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(z, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(z, t) + S \cdot \frac{\partial}{\partial t} y(z, t)$$

Il secondo termine a secondo membro è in qualche modo proporzionale alla velocità; è cioè un termine smorzante di attrito viscoso. Può ad esempio rappresentare l'attrito della corda con l'aria. Si noti che questo tipo di dissipazione è distribuito; ciò nonostante, risolvendo l'equazione, si perviene allo stesso risultato di decadimento esponenziale che si ottiene dal modello a guida d'onda. Si può quindi immaginare che vi siano infinite perdite infinitesimali, distribuite lungo la linea di ritardo (in accordo con la rappresentazione fisica del fenomeno che abbiamo dato), che sono state commutate tra loro, spostate e concentrate in uno o due punti solamente.

Con l'introduzione di questa correzione del modello, per tener conto del fenomeno dissipativo, abbiamo introdotto un tempo di decadimento uguale per tutte le parziali, indipendentemente dalla loro frequenza. Questo non è quanto avviene nelle corde reali, nelle quali più è alta la frequenza della parziale e più è breve il tempo di decadimento. Questo è un punto fondamentale perché, come vedremo nel seguito, assume un risvolto importante nella percezione del suono.

Affrontiamo ora il secondo degli inconvenienti precedentemente annunciati. Nei sistemi numerici possiamo usare l'aritmetica in virgola mobile, in modo tale da poter trascurare, senza problemi, l'errore di quantizzazione delle ampiezze. Ma poiché anche il tempo è una variabile discreta, una volta fissata una certa frequenza di campionamento, anche il tempo di ritardo totale della guida d'onda risulta discreto. Come conseguenza, anche l'altezza dei suoni prodotti risulta discretizzata. Ecco nascere il "problema di intonazione": per ottenere un'intonazione corretta (tipicamente per le note alte) o i passaggi in glissando, occorre produrre ritardi frazionari. Ciò è ovviamente possibile, con accuratezza qualsivoglia, ma a prezzo di un ulteriore costo computazionale (circa un ordine di grandezza più grande rispetto a quello richiesto per l'intera struttura a guida d'onda). In tal modo viene meno (almeno in parte) il vantaggio principale del metodo, ossia l'esigua complessità computazionale. J.O. Smith ha sviluppato degli algoritmi di interpolazione approssimata per produrre ritardi frazionari, adatti alle applicazioni musicali.

Caratteristiche percettive del suono

Prima di introdurre il terzo inconveniente del modello a guida d'onda, diamo uno sguardo generale a quanto conosciamo sulle caratteristiche percettive del suono – il timbro – per determinare quali di esse siano importanti per l'implementazione nel modello per la sintesi sonora.

I primi studi sul timbro sono di Helmholtz, uno dei più interessanti fisici e filosofi del diciannovesimo secolo.

Seguendo questo suo primo approccio alla percezione, il timbro di un suono (che è la caratteristica che ci permette di distinguere le diverse sorgenti indipendentemente dalla loro intensità, intonazione e posizionamento spaziale) è dovuto alla distribuzione energetica tra le varie parziali (armoniche) del segnale. Alcune semplici osservazioni sperimentali, condotte in laboratorio, sembrano apparentemente confermare quest'ipotesi.

Una forma d'onda a dente di sega suonerà assai differentemente da un'onda quadra, e possiamo facilmente osservare che i loro profili spettrali sono diversi.

Ma un esperimento (oggi) semplice da realizzare farà improvvisamente traballare le nostre certezze. Se per esempio prendiamo il segnale ottenuto dalla registrazione del suono di un pianoforte ed a partire da esso costruiamo un nuovo segnale, ottenuto per inversione dell'asse temporale, otteniamo lo stesso spettro del segnale originario, ma il suono sarà difficilmente riconducibile ad un pianoforte.

Ciò che ora appare chiaro, dopo oltre un secolo, è che ciò che noi indichiamo con il termine "timbro" è qualcosa di molto più complicato di quanto possa sembrare da queste teorie semplificate. Si dimostrano essere importanti, infatti, non solo le caratteristiche spettrali, ma anche quelle nel dominio del tempo, così come tutte quelle proprietà che riguardano contemporaneamente sia il dominio diretto che trasformato. Facciamo un passo indietro ed andiamo a considerare le proprietà di smorzamento delle corde reali. Ogni corda mostra avere un tempo di decadimento che diminuisce con la frequenza. Ciò significa, tra l'altro, che durante il decadimento, la forma d'onda non si conserva. Inoltre lo spettro reale è ben lontano dal mostrare una perfetta armonicità tra le varie componenti, ed è proprio quella parte di anarmonicità a conferire al suono la sua particolarità.

Rapporti leggermente superarmonici tra le componenti spettrali danno luogo ad una sensazione di suono metallico, come risulta il suono prodotto dalle corde rigide. E' il caso delle corde del pianoforte, che sono rigide e, di conseguenza, "metalliche".

Rapporti leggermente subarmonici conferiscono al suono un timbro più o meno accentuato da "suono di padella". Un alto livello di anarmonicità (come è tipico dei suoni provenienti dai membranofoni), può distruggere completamente la percezione dell'intonazione, conducendo a timbri percussivi (senza intonazione, non melodici).

Ma vi sono ancora più sottili proprietà del suono, che fanno peraltro parte della nostra quotidiana esperienza percettiva. Finora abbiamo trattato solo caratteristiche compatibili con un modello lineare degli oggetti risonanti. A partire da ora ci occuperemo anche di componenti e comportamenti non lineari.

Per esempio le ampiezze delle componenti spettrali possono microfluttuare, così come le loro frequenze, sia in modo sincrono che asincrono.

Il primo fenomeno suggerirebbe l'esistenza di uno scambio energetico tra parziali, mentre il secondo sembrerebbe indicare una sorta di interazione con un'oscillazione parametrica in bassa frequenza. In tutti questi fenomeni, se si ascolta con attenzione qualche strumento acustico, è difficile percepire una perfetta periodicità. E' infatti presente, sovrapposta al comportamento fondamentalmente lineare ed armonico degli strumenti musicali reali, una certa quantità di caos (micro-caos). Il suono degli strumenti musicali reali è molto simile al fiume di Eraclito, nel quale «non è possibile bagnarsi due volte nella stessa acqua».

Queste proprietà percettive sono estremamente importanti perché sono quelle che fanno la differenza tra il suono di uno strumento musicale "naturale" ed uno elettronico. Si potrebbe perfino affermare che questa differenza è proprio la peculiarità timbrica degli strumenti elettronici. E' noto come si manifesti un problema della stessa natura anche con i suoni campionati, ottenuti con sintesi per wavetable. Dato che i campioni devono essere di durata finita, l'unico modo per ottenere in riproduzione un suono lungo a piacere è quello di inserire un loop nella parte terminale del suono stesso. E' possibile così, almeno in linea di principio, ottenere un suono di durata qualsivoglia (si pensi al suono campionato di un organo a canne). Ma questo loop, che è scelto accuratamente dal progettista, introduce comunque nel timbro una perfetta periodicità di lungo termine, che è immediatamente riconosciuta da qualsiasi ascoltatore come una caratteristica da suono artificiale.

Nessuno, che sia coinvolto seriamente nella ricerca sulle tecniche di sintesi sonora, può ignorare il ruolo fondamentale che assumono questi fenomeni non lineari e tempo-varianti. Sono stati compiuti molti sforzi per affrontare questi fenomeni non lineari, quantitativamente piccoli ma percettivamente importanti. I risultati ottenuti sono ancora provvisori e solo parziali.

Il problema alla base è che la "metrica", per dir così, della fisica o della matematica, non coincide con quella della percezione. Piccoli fenomeni fisici possono avere un impatto fondamentale sulla percezione, così come fenomeni fisici macroscopici possono essere poco o niente percepiti. Stiamo dicendo una verità piuttosto nota, nell'era della compressione audio.

Il problema con le guide d'onda, a mio avviso, è che sussistono problemi anche nel trattare le proprietà lineari, percettivamente importanti, come i tempi di decadimento. Comunque, prima di addentrarci in una discussione più profonda, proviamo ad analizzare i meccanismi fisici che sono coinvolti in tutti questi fenomeni non lineari.

Meccanismi non lineari e tempo-varianti nei sistemi risonanti che emettono suoni.

Rivolgiamo la nostra attenzione solo alle corde, nonostante considerazioni simili siano applicabili a qualsiasi altro sistema risonante.

Il nostro modello di partenza è solo una semplice approssimazione della corda reale.

La classica equazione d'onda bidimensionale (l'equazione della corda) è ottenuta sotto alcune ipotesi semplificative che ora discuteremo più in dettaglio.

Dimensionalità

Iniziamo dal problema della bidimensionalità. Le corde reali sono tridimensionali. Se si tiene conto della forza centrifuga, l'equazione diviene non lineare. E' pur sempre possibile, ovviamente, supporre che l'interazione tra le due coordinate, x ed y , sia debole, e che la forza centrifuga sia trascurabile; in questo modo si può supporre che la corda reale tridimensionale sia ottenuta per sovrapposizione di una coppia di corde ideali bidimensionali in cui sussiste una debole interazione tra le direzioni x ed y , da trattare come una perturbazione piccola e lenta.

Nella realtà il suono di una corda reale tridimensionale è effettivamente abbastanza simile a quello di una corda bidimensionale, salvo piccole, anche se percettivamente significative, peculiarità.

Forza di richiamo

La forza di richiamo è considerata come dovuta alla proiezione della tensione per piccoli spostamenti. Ciò equivale ad identificare un seno con l'arco, il che equivale a linearizzare la forza centripeta. La corda è inoltre considerata perfettamente estensibile, in modo da poter supporre che nessun'altra forza abbia luogo a causa dell'elongazione della corda stessa.

Queste non-linearità, più o meno grandi, possono dar luogo ovviamente ad un piccolo trasferimento energetico tra le armoniche e sono la causa del fenomeno dell'aumento di altezza che si avverte quando si pizzica la corda. Quando una corda viene pizzicata energicamente, inizialmente l'intonazione è un poco più alta rispetto agli istanti successivi. Questo fenomeno dà l'impressione di uno "sforzato" (*sf*), come avviene, per esempio, nell'arpa.

Inoltre le corde sono considerate completamente non rigide, perciò la componente della forza di richiamo di rigidità viene trascurata. E' bene notare che la rigidità è un termine lineare e quindi non induce il modello ad uscire dal suo funzionamento lineare, e pertanto non approfondiremo ulteriormente in questa direzione. Il termine di rigidità è un termine derivativo del quarto ordine; è un termine conservativo che quindi non introduce dissipazione, ma induce dispersione e quindi la velocità di fase dell'onda viaggiante non è costante con la frequenza. Questa è la ragione per cui questo termine è in grado di spostare le frequenze.

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \Xi^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$$

La rigidità è rappresentata nei modelli a guida d'onda (che darebbero, di per loro, perfetta armonicità), introducendo dei ritardi di fase dipendenti dalla frequenza. A questo scopo ben si adattano i filtri passa tutto. (Vedi fig. 3)

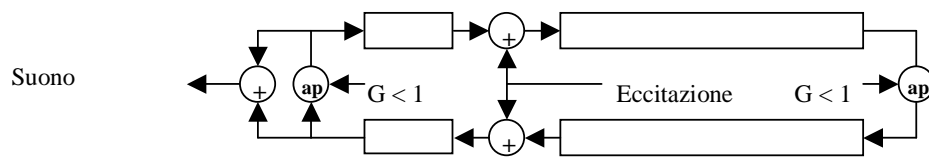


fig. 3.

Gradi di libertà

Oltre alla dimensionalità, la corda ha altri gradi di libertà "nascosti". Il suo moto non è confinato nella sola direzione trasversale. Se la corda è capace di allungarsi, si può osservare la propagazione di un insieme quasi indipendente di onde longitudinali. Queste onde sono descritte da equazioni simili a quelle già viste, ma verosimilmente hanno una velocità di propagazione superiore (e di conseguenza più alte frequenze). Esse hanno sia un effetto diretto (e quindi udibile) sia uno parametrico.

L'effetto udibile è dovuto al fatto che le oscillazioni longitudinali si possono propagare al ponticello, tramite un'azione a leva, venendo in questo modo irradiate dalla cassa armonica.

L'effetto parametrico è dovuto alle variazioni locali della forza centripeta, che può introdurre una debole modulazione della frequenza del moto trasversale.

Poiché la corda non è infinitamente sottile, è anche presente una oscillazione torsionale, cui si possono applicare le medesime considerazioni. I moti torsionali possono inoltre divenire un aspetto importante quando le corde sono suonate con l'archetto, a causa del meccanismo di eccitazione che sfrutta la forza di attrito tangenziale.

Vincoli

Finora abbiamo considerato ad entrambe le estremità vincoli ideali, come limiti perfettamente riflettenti. Essi possono anche dare luogo a fenomeni lineari, poiché trasmettono energia all'intero strumento (non necessariamente con risposta piatta), e presentare quindi una ammettenza complessa. Questo fenomeno può considerarsi come un filtraggio lineare, quindi non è di particolare interesse nella nostra trattazione.

Tuttavia i vincoli non sono ideali anche sotto altri aspetti.

In primo luogo, non sono simmetrici. Questo significa che la lunghezza efficace della corda varia nel tempo, in funzione della direzione e del verso del moto.

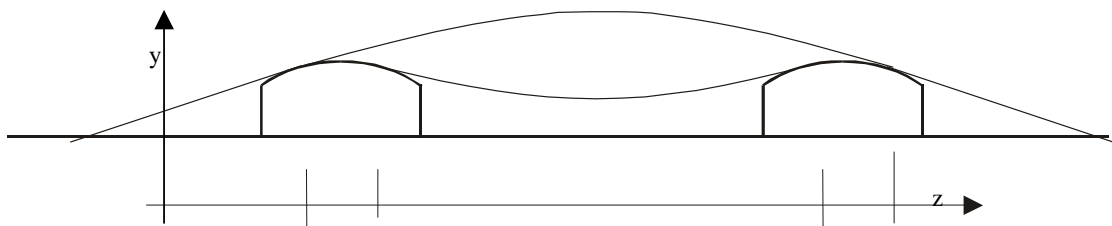


fig. 4. Corda vibrante sui suoi vincoli – vista laterale

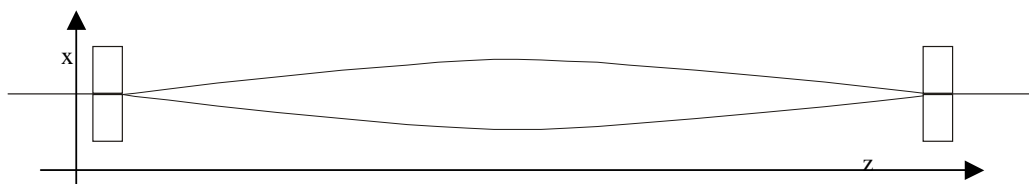


fig. 5. Corda vibrante sui suoi vincoli – vista dall'alto

Lo strumento paradigmatico sotto quest'aspetto è il Kantele, uno strumento popolare finlandese in cui il meccanismo di aggancio delle corde rende la lunghezza dello spostamento verticale diversa da quella dello spostamento orizzontale, e pertanto produce battimenti. Il Kantele è stato a lungo studiato e per esso è stato anche costruito un modello a guida d'onda (usando due diverse guide d'onda accordate diversamente).

Aspetti fisici e percettivi conosciuti

Quanto è importante ognuno di questi fattori dal punto di vista della percezione? Per quanto mi risulti, non sono stati compiuti molti lavori sperimentali sulla loro importanza relativa. E' ben noto a tutti che il tempo di decadimento delle varie componenti armoniche, nelle corde, decresce con la frequenza, ma non si conoscono leggi empiriche per i vari materiali, per diverse le lunghezze, e così via. Non dovrebbe essere così difficile eseguire questo tipo di misure utilizzando un'adeguata strumentazione audio. Spero di essere in grado, nel futuro, di effettuare misure in questa direzione. Da un punto di vista teorico, quest'aspetto sarà affrontato più avanti nel corso della trattazione.

Come già detto, è oggi ben noto, grazie agli studi di Risset, che il timbro della tromba è principalmente dovuto ai diversi tempi di salita delle varie componenti armoniche (non monotoni nella frequenza). Il fatto che i tempi di salita e di discesa delle varie componenti armoniche siano molto importanti dal punto di vista percettivo è un principio che si può ritenere generale.

Anche il fatto che le componenti armoniche manifestano microfluttuazioni sia in ampiezza sia in frequenza, senza alcuna percepibile perfetta periodicità, è ben noto. L'effetto risultante di tutte queste fluttuazioni – nel dominio delle frequenze – è di rendere lo spettro più denso (rispetto ad un "perfetto", e matematicamente costante, insieme di armoniche).

A me sembra che l'apparato percettivo umano sia molto sensibile a questi addensamenti localizzati, p.e. in prossimità delle righe spettrali. I suoni privi di queste proprietà sono percepiti come "vuoti". E' ragionevole supporre che ci debba essere qualche particolare motivo per il quale si manifesta questa sensibilità, probabilmente legato a qualche teleonomia fondamentale (biologica) del nostro apparato uditivo.

A tutt'oggi non abbiamo una conoscenza precisa dei meccanismi di funzionamento del nostro apparato uditivo, ma si può comunque provare a azzardare qualche ipotesi.

Parecchi meccanismi di percezione si basano sulla capacità di rilevare profili spettrali "formanti", usando suoni a pettine il cui profilo spettrale non è né ben noto né costante. Questo meccanismo interviene nell'ascolto del parlato, nel quale è responsabile della capacità di discernimento delle vocali, ma anche nella localizzazione spaziale del suono. Parecchi distinti meccanismi concorrenti contribuiscono alla nostra compiuta capacità di localizzare la provenienza dei suoni, sia in direzione azimutale sia in elevazione, oltre che di discriminare in senso antero-posteriore.

Le differenze dei tempi di arrivo (o delle intensità) interaurali non sono, infatti, in grado di risolvere completamente l'ambiguità nel posizionamento della sorgente, principalmente nella localizzazione avanti/dietro e di elevazione.

E' ben noto che un grande contributo alla risoluzione di queste ambiguità viene dalle "Head Related Transfer Functions" (HRTF), ossia dalle caratteristiche di filtraggio della testa, alle quali il più significativo

contributo viene fornito dai padiglioni auricolari, con un ulteriore leggero contributo fornito dalla forma del capo. Le HRTF sono dipendenti dalla direzione, ed è il riconoscimento delle loro forme a permetterci di determinare la direzione di provenienza del suono.

Sotto questo punto di vista anche il processo di rivelazione della direzione della sorgente può essere concepito come una sorta di processo di estrazione delle formanti, obiettivo piuttosto difficile da raggiungere quando i segnali in arrivo hanno righe spettrali sia pure perfettamente costanti ma di profilo non certo, ed in presenza di rumore di fondo. (La conoscenza del profilo spettrale della sorgente è molto approssimata, a causa non solamente della variabilità della sorgente stessa, ma anche di quella delle proprietà di filtraggio dell'ambiente).

La presenza di righe spettrali addensate in certi intervalli può quindi venirci in aiuto, permettendo la determinazione della derivata locale del profilo della formante, in modo da poter eseguire una sorta di interpolazione tra righe spettrali consecutive. E' solo un'ipotesi: questa potrebbe essere la funzione biologica della densità spettrale e può essere la ragione per cui suoni troppo "perfetti" sono difficilmente localizzabili, e l'intelligibilità del parlato sintetizzato da sistemi aventi proprietà spettrali "troppo perfette" non è buona.

Caos

Il caos è presente nel suono degli strumenti musicali? Ci sono pochi studi su questo argomento, ma tutti forniscono una risposta affermativa alla domanda. In questa sede è possibile aggiungere solo alcune considerazioni.

In primo luogo, possiamo osservare le figure di Lissajous che, vicino al ponticello, disegna una corda di chitarra pizzicata sul piano perpendicolare alla corda stessa. La loro evoluzione è imprevedibile, con subitanei e irripetibili cambiamenti nella direzione del moto (siamo sul piano (x, y)), principalmente nella fase terminale del decadimento. E' difficile resistere alla tentazione di indicare come caotico questo moto. Sarebbe comunque relativamente facile registrare questo moto usando una adeguata strumentazione, e quindi sottoporlo ad una opportuna analisi (calcolo dei coefficienti di Liapunov per esempio, dato che la ricerca delle biforcazioni, a mio avviso, è troppo difficile se non impossibile).

In secondo luogo, per quanto riguarda l'ipotesi prima riportata, è bene notare che le microfluttuazioni delle ampiezze e delle frequenze delle parziali, se integrate nel tempo, danno luogo ad uno spettro localmente più denso di quello che qualsiasi oscillazione parametrica perfettamente periodica potrebbe fornire. E' pertanto ragionevole ipotizzare che il lavoro svolto dal nostro sistema di percezione sia reso più semplice dalla presenza di microfluttuazioni.

Per concludere, è bene notare che "ragionevole" non significa necessariamente "vero" (indipendentemente da quale significato si attribuisca a quest'ultimo termine). Tutte queste considerazioni andrebbero sottoposte a circostanziate ricerche, sia teoriche, sia sperimentali.

Smorzamento delle parziali.

In alcuni lavori, condotti qualche anno fa da Marco Palumbi e da me, abbiamo proposto diverse considerazioni in proposito. Il più semplice meccanismo che si può supporre per dare fisicamente conto di questo comportamento è quello di supporre l'esistenza di qualche meccanismo nella corda in grado di dissipare energia per attrito interno, in modo che questa forza d'attrito sia proporzionale alla velocità di variazione della curvatura della corda. E' una sorta di attrito viscoso (in qualche modo legato ad un termine di velocità) che è possibile osservare praticamente piegando ripetutamente in sù e in giù un pezzo di filo di ferro. E' possibile notare il surriscaldamento del punto di piegatura, fino alla sua fusione e conseguente rottura. Di tale meccanismo si può tenere conto analiticamente introducendo nell'equazione della corda un termine alle derivate miste:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + S_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} y$$

L'ultimo termine si può facilmente interpretare come velocità di variazione (derivata temporale) della derivata seconda spaziale della forma (componente normale all'asse z della curvatura). Questo modello si comporta bene da un punto di vista qualitativo: esso afferma che se la forma della corda non cambia nel tempo, non si ha dissipazione di energia, come c'è da aspettarsi da qualsiasi meccanismo di dissipazione

interno. Per altro, S_i , il coefficiente di smorzamento interno, è indipendente dalla lunghezza della corda, ed è una grandezza specifica del materiale della corda stessa. Ci si aspetta che il nylon e la minugia (budello) mostrino valori più alti rispetto ai metalli.

Risolviendo l'equazione (8), si può osservare che il moto è smorzato ma che la costante di tempo di smorzamento dipende dall'indice di parziale (vale a dire dalla frequenza).

Questa equazione ha la seguente soluzione generale:

$$y(z,t) = \alpha \cdot \sin(k \cdot z \pm \omega \cdot t) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Introducendo le condizioni al contorno $y(0,t)=y(L,t)=0$, ne segue la discretizzazione di k :

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{L} \text{ e } \omega_n = \pm n \cdot \pi \cdot \frac{c}{L} \cdot \sqrt{1 - (n \cdot \pi \cdot \frac{S_i}{c \cdot L})^2}$$

Per corde conservative (dove $S_i=0$), le frequenze sono invece:

$$\omega_n^c = \pm n \cdot \pi \cdot \frac{c}{L}$$

I modi delle corde dissipative sono:

$$y_{\pm n}(z,t) = 2 \cdot \alpha \cdot e^{\frac{-t}{\tau_n}} \cdot \sin(k_n \cdot z) \cdot \cos(\pm |\omega_n| \cdot t) \text{ se } \omega_n \text{ è reale } (n < \frac{c \cdot L}{\pi \cdot S_i})$$

oppure

$$y_{\pm n}(z,t) = 2 \cdot \alpha \cdot e^{\frac{-t}{\tau_n}} \cdot \sin(k_n \cdot z) \cdot \cosh(\pm |\omega_n| \cdot t) \text{ se } \omega_n \text{ è immaginario } (n > \frac{c \cdot L}{\pi \cdot S_i})$$

Le costanti di tempo di smorzamento sono:

$$\tau_n = \frac{2}{S_i \cdot k_n^2} \text{ dunque } \frac{\tau_n}{\tau_1} = \frac{1}{n^2}$$

Un altro modo utile di rappresentare questi risultati è di esprimere le frequenze nei termini dei corrispondenti modi conservativi (vale a dire frequenze con lo stesso indice n):

$$\omega_n = \pm n \cdot \omega_1^o \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot n}{\tau_1 \cdot \omega_1^o} \right)^2}$$

Rigidità

Prendiamo ora in considerazione la rigidità della corda:

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(z,t) = -\Xi^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} y(z,t) + c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(z,t)$$

La soluzione di questa equazione porge i seguenti modi (frequenze):

$$\omega_n = \pm \sqrt{\Xi^2 \cdot k_n^4 + c^2 \cdot k_n^2}$$

oppure in termini dei modi non rigidi: ω_n^o :

$$\omega_n = \omega_n^o \cdot \sqrt{\frac{\Xi^2 \cdot \omega_n^{o2}}{c^4} + 1}$$

Cancellazione dei modi

Si noti che i modi aventi frequenze puramente reali sono oscillatori, mentre i modi che hanno frequenze immaginarie sono sovrasmorzati e non oscillatori. Nel seguito, chiameremo questi modi con il termine "modi soppressi".

La condizione perché vi sia oscillazione diviene ora:

$$n < \frac{\tau_1 \cdot \omega_1^c}{2} \text{ dove } \omega_1^c \text{ è la fondamentale conservativa.}$$

Occorre fare un'altra osservazione: questo tipo di smorzamento introduce dispersione; le frequenze delle componenti non stanno in rapporto armonico.

La subarmonicità è debole – se non da un punto di vista microtonale - come si può evincere dalle figure seguenti, nelle quali le anarmonicità delle varie componenti sono riportate in funzione della fondamentale, per una costante di tempo di smorzamento della fondamentale pari a $\tau=0.5$ s (vedi fig. 6).

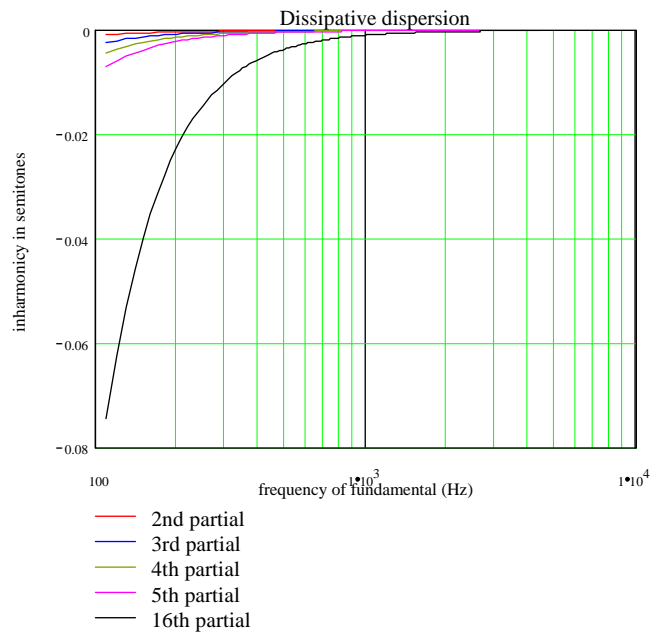


fig. 6.

Il numero di parziali oscillanti con questa costante di tempo (vedi fig. 7) è alto:

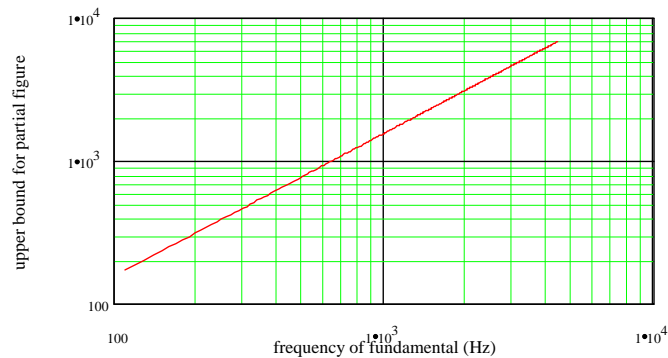


fig. 7.

Usando una costante di tempo, meno verosimile, pari a $\tau=0.1$ s, le anarmonicità incominciano a divenire apprezzabili ed il numero di parziali oscillanti decresce drammaticamente (vedi fig. 8 e fig. 9).

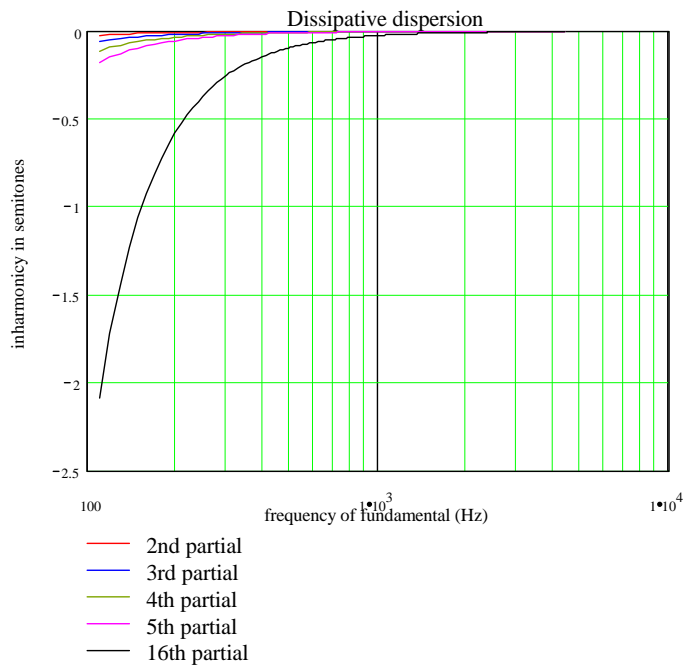


fig. 8.

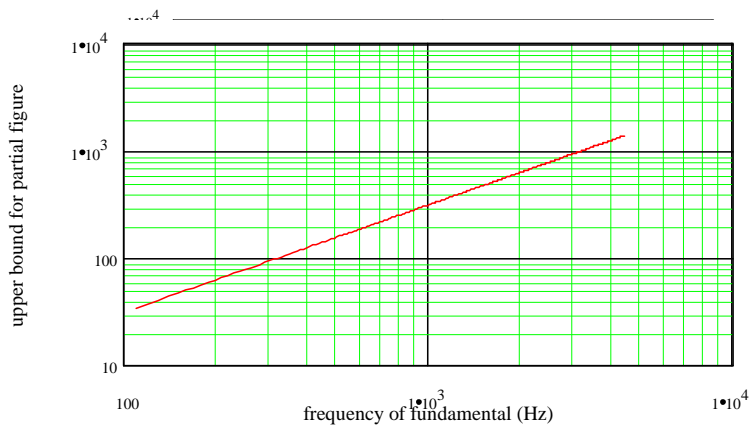


fig. 9.

Qualche anno fa Marco Palumbi ed io abbiamo implementato un algoritmo per calcolare in tempo reale la soluzione di questa equazione, e abbiamo sviluppato un programma per calcolatore. I risultati di queste simulazioni (in questo caso: sintesi) furono inaspettatamente buoni. Il decadimento del suono mostrava una particolare naturalezza (come è possibile sentire dagli esempi sonori), anche se ancora con perfette periodicità e riproducibilità. Da questo sembra lecito dedurre che la legge del decadimento con la frequenza è abbastanza corretta qualitativamente.

Anche le guide d'onda sono state dotate di alcuni accorgimenti per ottenere un tempo di decadimento decrescente con la frequenza. Il problema è che tutte le implementazioni che abbiamo avuto modo di ascoltare non danno risultati molto naturali. Non è per caso, come vedremo tra poco.

Per ottenere un tempo di decadimento variabile con la frequenza l'idea è stata quella di inserire un guadagno variabile con la frequenza stessa, cioè un filtro passa basso invece di un semplice blocco di guadagno. In questo modo le alte frequenze sono smorzate più velocemente di quelle più basse (dato che per loro il guadagno d'anello è inferiore).

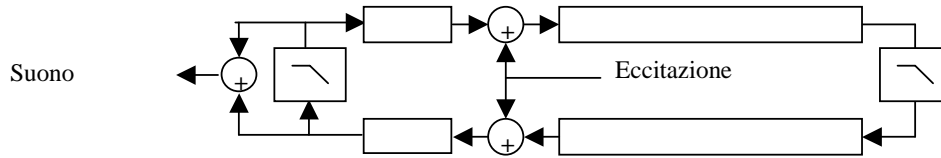


fig. 10.

Sfortunatamente, le cose non sono così semplici. Proviamo a chiederci come debba essere fatto questo filtro per ottenere il comportamento definito dal termine dissipativo che abbiamo inserito nell'equazione. Se consideriamo il nostro meccanismo dissipativo come una serie di filtri infinitesimali, possiamo commutarli e muoverli fino alle estremità, alla maniera "concentrazionista" tipica delle guide d'onda.

Il problema che il filtro che ne risulta è trascendente, non-polinomiale. Per così dire, è non-concentrabile per motivi di principio. Ci si può fare un'idea di come vadano le cose, grosso modo, cercando di stimare questo filtro. E' abbastanza facile calcolare come debba risultare l'andamento del guadagno con la frequenza per ottenere la relazione inversa quadratica dei tempi di decadimento sopra menzionata:

$$\frac{\tau_n}{\tau_1} = \frac{1}{n^2}$$

Se si trascura la dispersione, la legge è semplicemente questa:

$$G(\omega) \approx e^{-k \cdot \frac{\omega}{\omega_1}}$$

dove ω_1 è la pulsazione della fondamentale. Se si considera G come il modulo della funzione di trasferimento, è evidente che questa è non-polinomiale.

Eccone qui il grafico bilogarithmico.

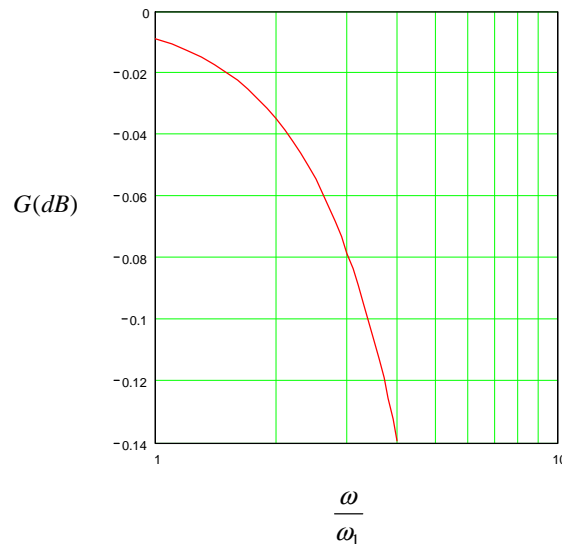


fig. 11.

Si può ovviamente pensare di approssimare questa curva per tratti, usando segmenti polinomiali, facendo quindi uso di un numero discreto e finito di poli e zeri. Anche se è in linea di principio possibile, dato che ogni curva può essere approssimata localmente mediante una serie di Laurent, non è per niente cosa facile. C'è inoltre un'ulteriore considerazione: il grosso problema non è quello di ottenere un corretto andamento del guadagno (cioè delle ampiezze), perché nella realtà al decadimento "puro" si sovrappongono molti altri fenomeni. Il vero problema è ottenere un andamento esatto della fase. E' la fase ad essere responsabile della dispersione, perché essa equivale ad un ritardo e quindi, cambiamenti di fase significano cambiamenti di

velocità di propagazione della parziale e quindi ancora, della sua frequenza. Fasi inesatte introducono (o modificano) l'anarmonicità, un aspetto percettivamente molto importante, al quale siamo molto sensibili. Il problema dell'anarmonicità è così importante da essere il principale difetto del modello precedente di cui vi parlavo, basato sulla soluzione diretta dell'equazione di moto.

La dissipazione introduce in realtà dispersione (esattamente come fa la rigidità), ma in un suo modo del tutto particolare. Quando la dispersione è alta, significa che il decadimento è rapido, e quindi l'anarmonicità che ne consegue è poco avvertibile. Quando il decadimento è molto rapido, il modo non è oscillante ("modo cancellato"). Bene, usando un numero finito di poli non riuscirete mai a cancellare un modo: tutti i modi oscillano. Ovviamente, se la costante di tempo è breve, le oscillazioni si "spegneranno" comunque rapidamente, diventando non più percepibili, ma questo fatto sposta verso l'alto il limite dei modi cancellati, rendendo inoltre questo limite funzione del volume del suono, non solo della frequenza..

Non ho mai fatto tentativi di approssimare questo filtro concentrato per valutarne personalmente le caratteristiche percettive, anche e soprattutto perché, nel frattempo, mi sono orientato – per tutti i motivi sopra menzionati – verso un diverso approccio al problema: la sintesi modale. Introduremo questo metodo dopo una breve discussione di quello basato sulla soluzione diretta.

Un metodo diretto per la soluzione dell'equazione d'onda.

Mostreremo ora il metodo che abbiamo utilizzato per integrare l'equazione d'onda. Potete trovare una esposizione più approfondita nella letteratura in riferimento. Il metodo si basa sulla decomposizione della forma d'onda spaziale della corda, basata su di una sorta di trasformata seno, usata assieme ad un algoritmo per integrare il moto nel tempo.

Il problema più complesso quando si integra numericamente l'equazione d'onda è data dal fatto che abbiamo a che fare con smorzamenti molto piccoli. Metodi numerici di ordine anche elevato (come il Runge-Kutta, tanto per fare un esempio) risultano completamente inutili perché introducono una specie di "smorzamento numerico" che si sovrappone a quello reale, purtroppo di qualche ordine di grandezza più accentuato. I suoni delle corde reali sono "quasi stazionari". Per questa ragione abbiamo usato una variazione di una vecchia regola (la regola di Stoermer) che è stata usata per il calcolo dei sistemi conservativi fin dagli inizi del XX secolo.

Il maggiore problema che questa regola (algoritmo) presenta, quando la si applica alla corda, è che i piccoli errori numerici che introduce hanno effetti non solamente nelle ampiezze, ma anche nelle frequenze delle parziali, spostandole in direzione subarmonica. E' questa una caratteristica particolarmente fastidiosa dal punto di vista percettivo, perché attribuisce al suono un timbro da "pezzo di latta" o se volete da "padella". Per avere ragione di questi errori, quantitativamente piccoli ma dagli effetti percettivamente drammatici, l'unica soluzione è quella di sovracampionare (nel tempo), cioè di calcolare spostamenti molto piccoli. Siamo stati obbligati a sovracampionare di un fattore 4, rispetto alla classica frequenza da CD di 44.1 KHz., per riuscire a rendere questi spostamenti di frequenza impercettibili. Se si tiene conto che il nostro modello si limitava alle prime 16 parziali, il rapporto tra frequenza di campionamento e frequenza di taglio superiore del segnale che ne risulta è veramente pessimo. Dato che, inoltre, il modello implica intrinsecamente il calcolo di un prodotto matrice-vettore le cui dimensioni sono pari al numero delle parziali, ne risulta che la complessità computazionale cresce con il quadrato del numero di parziali desiderato, al quale bisogna aggiungere un ulteriore fattore dovuto al sovracampionamento, anch'esso dipendente dalla più alta frequenza in gioco (quindi, dal numero di parziali).

E' per questi motivi che, dopo diversi tentativi senza successo di ridurre significativamente il numero di calcoli necessari, mi sono orientato verso un approccio modale.

Il modello diretto, e il corrispondente programma di calcolo, è stato utilizzato dal compositore Michelangelo Lupone in due pezzi: "Corda di metallo" per quartetto d'archi e nastro magnetico (Roma, Accademia Filarmonica, Kronos Quartet, 1997) e "Canto di Madre", per algoritmo della corda e voce femminile (Radio Vaticana, 1999).

La sintesi Modale.

Secondo l'approccio alla sintesi modale che segue, si lascia evolvere ogni modo come se si trattasse di un sistema conservativo, correggendo per gli effetti della eccitazione e della dissipazione, considerati come perturbazioni rispetto al moto stazionario.

L'idea è questa. Decomponiamo l'accelerazione della corda in tre componenti, in modo da decomporre anche l'equazione del moto in tre equazioni:

$$(6) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(z,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y^c(z,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} y^d(z,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} y^e(z,t)$$

dove gli apici c , d , ed e stanno per “conservativo”, “dissipativo”, e “eccitativo”.
Possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y^c(z,t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} y^c(z,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y^d(z,t) = S_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} y^d(z,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y^e(z,t) = F(z,t) \text{ dove } F(z,t) \text{ è una qualche funzione di eccitazione, espressa in termini di accelerazione.}$$

Il sistema parte a t_0 con valori iniziali noti di una coppia di variabili coniugate, comuni alle tre equazioni. Siano esse lo spostamento e la velocità:

$$(y(z, t_0), y'(z, t_0))$$

Dalla linearità abbiamo:

$$(y(z, t_0 + \delta t), \frac{\partial}{\partial t} y(z, t_0 + \delta t)) = (y_c(z, t_0 + \delta t), \frac{\partial}{\partial t} y_c(z, t_0 + \delta t)) + (y_d(z, t_0 + \delta t), \frac{\partial}{\partial t} y_d(z, t_0 + \delta t)) + (y_e(z, t_0 + \delta t), \frac{\partial}{\partial t} y_e(z, t_0 + \delta t))$$

Queste soluzioni possono essere espresse come combinazioni lineari di modi:

$$y(z,t) = \sum_n a_n \cdot y_n(z,t) = \sum_n Y_n(t) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

$$y'(z,t) = \sum_n \frac{\partial Y_n(t)}{\partial t} \cdot \sin(k_n \cdot z) \text{ dove } k_n = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

Possiamo limitare la somma al numero di parziali alle quali siamo interessati, oppure al “limite di cancellazione”, o alla frequenza di Nyquist, o a qualunque limite ragionevole dal punto di vista percettivo, secondo quale di questi sia il più basso.

Stiamo cercando nuovi valori, a partire dalla conoscenza di quelli precedenti:

$$(y(z, t_0), y'(z, \delta t)) \rightarrow (y(z, t_0 + \delta t), y'(z, t_0 + \delta t))$$

Possiamo considerare $t_0 = 0$, senza perdere in generalità.

Riguardo alla prima equazione (conservativa), la soluzione può essere espressa in questo modo:

$$y_n^c(z,t) = A_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \phi_n) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

$$y_n^c(z,t) = -A_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \phi_n) \cdot \omega_n \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

Essendo le condizioni iniziali:

$$y_n^c(z,0) = A_n \cdot \cos(\phi_n) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

$$y_n^c(z,0) = -A_n \cdot \sin(\phi_n) \cdot \omega_n \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

Cosicché, chiamando $Y_o^c = A_n \cdot \cos(\phi_n)$ e $V_o^c = -A_n \cdot \sin(\phi_n) \cdot \omega_n$, possiamo scrivere:

$$y_n^c(z,t) = (\cos(\omega_n \cdot t) \cdot Y_o^c + \sin(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{V_o^c}{\omega_n}) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

$$y_n^c(z,t) = (-Y_o^c \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \cdot \omega_n + V_o^c \cdot \cos(\omega_n \cdot t)) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

Di fatto, per calcolare l'evoluzione del sistema, dobbiamo sapere solo le due mutuamente correlate quantità $\cos(\omega_n \cdot t)$ and $\sin(\omega_n \cdot t)$.

Riguardo alla seconda equazione (smorzata), la soluzione è piuttosto semplice:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_d(z, t) = S_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} y_d(z, t)$$

$$y_n^d(z, t) = ((1 - e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot t}) \cdot \frac{V_n^o}{S_i \cdot k_n^2} + Y_n^o) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

$$y_n^d(z, t) = V_n^o \cdot e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot t} \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

Riguardo alla terza equazione, il compito di calcolarne il contributo è facile, se si è in grado di esprimere l'eccitazione nei termini dei modi della corda:

$$F(z, t) = \sum_n F_n(t) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

E' utile esprimere la soluzione generale dell'equazione in termini di una trasformata seno della sua forma spaziale, troncata ad un numero finito di modi:

$$y(z, t) = \sum_n Y_n^o(t) \cdot \sin(k_n \cdot z)$$

Il suono della corda può essere "catturato" come velocità di variazione della derivata spaziale della forma della corda nell'origine (supponendo che lì si trovi il ponticello).

$$snd(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} y(0, t) = \sum_n k_n \cdot \frac{\partial}{\partial t} Y_n^o(t)$$

$$snd_n(t) = k_n \cdot \frac{\partial}{\partial t} Y_n^o(t)$$

Ora possiamo sommare i vari contributi parziali ai coefficienti totali:

$$Y_n^o(t) = Y_n^c(t) + Y_n^d(t) + Y_n^e(t)$$

$$V_n^o(t) = V_n^c(t) + V_n^d(t) + V_n^e(t)$$

$$Y_n^o(t) = (\cos(\omega_n \cdot t) \cdot Y_n^o(0) + \sin(\omega_n \cdot t) \cdot \frac{V_n^o(0)}{\omega_n}) + (V_n^o(0) \cdot \frac{(1 - e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot t})}{S_i \cdot k_n^2} + Y_n^o(0) + Y_n^e(t))$$

$$V_n^o(t) = (-Y_n^o(0) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \cdot \omega_n + V_n^o(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t)) + V_n^o(0) \cdot e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot t} + V_n^e(t)$$

Cosicché il suono risulta:

$$snd_n(t) = k_n \cdot (-\sin(\omega_n \cdot t) \cdot \omega_n \cdot Y_n^o + \cos(\omega_n \cdot t) \cdot V_n^o + V_n^o \cdot e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot t} + \frac{\partial}{\partial t} Y_n^e(t))$$

Algoritmi per il tempo reale

Stiamo vedendo come il calcolo del contributo di un modo al suono complessivo richieda solo qualche moltiplicazione e somma, oltre alla conoscenza delle quantità $\sin(\omega_n \cdot \delta t)$ e $\cos(\omega_n \cdot \delta t)$, dove δt è il tempo di campionamento.

L'evoluzione del sistema richiede inoltre la conoscenza della quantità $e^{-S_i \cdot k_n^2 \cdot \delta t}$. Per evitare di dovere utilizzare divisioni (che sono abbastanza computazionalmente costose in certi sistemi), e per fare della trigonometria in tempo reale, si può fare uso di tabelle precalcolate di queste quantità:

$$\frac{\sin(\omega_n \cdot \delta t)}{\omega_n}, \cos(\omega_n \cdot \delta t)$$

Assumendo il cent come unità (considerato il minimo per esigenze microtonali), questo significa 1200 valori per ottava per grandezza. Per essere in grado di affrontare l'intero spettro udibile (20Hz ÷ 20 KHz), dobbiamo considerare circa 10 ottave, il che conduce ad una coppia di tabelle da 12.000 valori in virgola flottante ciascuna. 24.000 valori sono oggi una quantità ragionevole su qualunque sistema vogliate lavorare. In un PC possono entrare nella cache di CPU anche alla precisione di 10 byte per float.

Anche il termine esponenziale può essere precalcolato off-line, per evitare di dover calcolare esponenziali in tempo reale, ma a partire da unità differenti. Esso dipende dal coefficiente d'attrito S_i e dal numero d'onda k_n . Se vogliamo considerare variazioni d'intonazione dovute a variazioni di lunghezza, questi ultimi dipendono a loro volta dalla lunghezza della corda, e sono quindi in linea di principio modulati dalle

variazioni di frequenza della fondamentale, assieme ai termini sinusoidali e cosinusoidali di cui sopra. Se però si ricorda che questo termine è responsabile solo del decadimento della parziale e quindi della dispersione, è abbastanza facile convincersi che non è richiesta per esso una grande precisione. Può quindi essere sistemato in una tabella relativamente piccola che ha $S_i \cdot k_n^2$ come ingresso, dalla quale si possono poi ricavare valori più fini interpolando linearmente.

Conclusioni.

Seguendo le summenzionate indicazioni è possibile implementare un programma per calcolatore capace di simulare in tempo reale le corde. Accettando ragionevoli semplificazioni e approssimazioni, si possono introdurre comportamenti tempo-varianti e non lineari per investigarne la loro importanza percettiva. I buoni risultati dell'approccio precedente, basato su un metodo diretto di soluzione, sono in effetti d'incoraggiamento in questa direzione, perché si può considerare acquisito che per queste strade si ottengono risultati interessanti anche dal punto di vista musicale. Possiamo quindi considerare come abbastanza certo anche il fatto che questi metodi ci porteranno ad un significativo miglioramento rispetto alle attuali tecniche di sintesi come, ad esempio, la Modulazione di Frequenza, le wavetable e i modelli fisici basati su linee di ritardo più o meno sofisticate.

Inoltre, questo approccio ci conduce in modo del tutto naturale ad una più profonda comprensione del funzionamento degli strumenti acustici reali, arrivando a suggerire nuovi modi di utilizzarli, e anche all'implementazione di nuovi strumenti elettro-acustici.

Il primo caso è stato quello di "Corda di metallo" di Michelangelo Lupone, in cui l'ambiente timbrico del pezzo era ispirato all'algoritmo utilizzato per produrre la parte per nastro magnetico. Le nuove tecniche esecutive introdotte sono state sperimentate e concepite utilizzando il modello, verificandone con esso il loro risultato percettivo. Al momento della scrittura di questo documento (Giugno 2002) il lavoro di implementazione del nuovo modello modale non è ancora completo, ma si spera di potere mostrare i primi risultati al seminario.

Bibliografia.

- [1] Raman, C.V. (Ramaseshan S. Editor), "Scientific Papers of C.V. Raman: Acoustics" 1989. *MIT Press*.
- [2] Cremer L., Allen J.S., "The Physics of the Violin" 1985. *MIT Press*.
- [3] Hiller H., Ruiz P., 1971. "Synthesizing Musical Sounds by Solving the Wave Equation for Vibrating Objects: Part 1" - "Part 2" *JAES* 12 July (6), August (7)
- [4] Schelleng J.C. "The Bowed String and the Player" 1973. *JASA* 53 (1).
- [5] McIntyre M.E. et al., "Fundamentals of Bowed String Dynamics", 1979. *Acustica* 43.
- [6] Schumacher R.T., "Self-Sustained Oscillations of the Bowed String." 1979. *Acustica* 43.
- [7] McIntyre M.E. et al., "Aperiodicity in Bowed String Motion", 1981. *Acustica* 49.
- [8] McIntyre M.E., Schumacher R.T., Woodhouse J. "On the Oscillations of Musical Instruments", 1983. *JASA* 74 (5)
- [9] Karplus, K., Strong, A. 1983. "Digital Synthesis of Plucked String and Drum Timbres." *CMJ* 7,2 pp.43-55
- [10] Jaffe, D.A., Smith, J.O. III "Extension of the Karplus-Strong Plucked-String Algorithm." Summer 1983. *CMJ* 7,2
- [11] Chafe, C. "Simulating Performance on a Bowed Instrument." 1989 *Current Directions in Computer Music Research* - Edited by Matew, M. and Pierce, J. MIT Press.
- [12] Woodhouse, J., 1992. "Physical Modeling of Bowed Strings." *CMJ*, 16,4, pp. 43-56
- [13] Smith, J.O. III 1996. "Physical Modeling Synthesis Update." *CMJ*, 20,2, Summer 1996 pp.44-56
- [14] Smith, J.O. III, 1996. "Discrete Time Modeling of Acoustic Systems with Applications to Sound Synthesis of Musical Instruments." *Proceedings of the Nordic Acoustical Meeting*, Helsinki, June 12-14
- [15] Välimäki V., Huopaniemi J., Karjalinen M., Jánosy Z. "Physical Modeling of Plucked String Instruments with Application to Real-Time Sound Synthesis" 1996. *JAES* 44 (5)
- [16] Mastropietro A., "Ritratto di musicista da sperimentatore: Michelangelo Lupone", *Sonus* n. 18, *Sonus Edizioni Musicali*, Potenza 1998.
- [17] Lupone M., "Spazio, arco e metallo" in *Musica tecnologia interazioni*, Quaderni della Civica Scuola di Musica, anno XIV N. 26 - Comune di Milano, 1999.
- [18] Marco Palumbi, Lorenzo Seno, "Physical modeling by directly solving wave PDE", *ICMC* 99 - November 1999 - Peking, China.