

CORDA DI METALLO

UN MODELLO E UN ALGORITMO PER LA SIMULAZIONE PER MODELLI FISICI DI STRUMENTI AD ARCO

PREPRINT

Marco Palumbi, Lorenzo Seno

marco.palumbi@bigfoot.com, lorenzo.seno@bigfoot.com

Centro Ricerche Musicali

Via Lamarmora, 18 - 00185 Roma - Italia

crm@wmail.axnet.it

<http://www.axnet.it/crm> - <http://www.geocities.com/Vienna/4934>

SOMMARIO

L'algoritmo di simulazione fisica di corda suonata con archetto qui presentato si basa su un modello alternativo alle "wave-guide", generalmente usate in questo tipo di ricerche. Il nostro approccio ha certamente allo stato attuale un maggiore costo di calcolo, compensato però dalla immediatezza della manipolazione dei parametri fisici, e dalla assenza di implicite assunzioni sulla invarianza nel tempo delle equazioni descrittive.

Il modello implementa lo smorzamento di tipo viscoso sia interno che con l'aria. L'archetto approssima il comportamento termico della colofonia mediante una funzione a soglia, e contiene un modello del rumore di sfregamento.

I parametri controllabili sono il rapporto tensione/densità della corda, i coefficienti di attrito, la velocità e la pressione dell'archetto, e il punto (discreto) di applicazione dell'arco (**b**).

L'algoritmo di calcolo attualmente utilizzato si basa su un metodo simile a quello agli elementi finiti nella variabile spaziale, e su quello alle differenze finite per l'evoluzione temporale.

Le caratteristiche del modello consentono la sua utilizzazione anche in zone "estreme" non appartenenti alla tradizione esecutiva degli strumenti ad arco.

Nonostante il modello non tenga conto di caratteristiche quali i moti torsionali e longitudinali, né dell'ammettenza del ponticello, i suoni ottenuti sono molto verosimili. Ciò forse indica che queste caratteristiche, dal punto di vista musicale, sono meno importanti di quanto ipotizzato.

INTRODUZIONE

Quando ci accingemmo, nell'autunno del 1996, ad affrontare il tema dei modelli fisici, la bibliografia ci porse immediatamente come l'indirizzo prevalente, se non esclusivo, di questa tradizione di ricerca risalisse a Karplus e Strong e ai successivi perfezionamenti: le guide d'onda. La letteratura sulla fisica del violino e degli strumenti ad arco porgeva d'altronde come in buona parte irrisolta la comprensione dei meccanismi sottostanti al suono degli archi e del peso dei vari fattori rispetto al risultato finale.

Avevamo inoltre a disposizione un sistema di calcolo abbastanza potente, basato su una architettura parallela e scalabile di DSP TMS320C40.

Queste circostanze ci hanno spinto a ricercare un approccio diverso, meno preoccupato, almeno nella fase iniziale, del costo di calcolo, a favore di una maggiore "trasparenza" fisica del modello,

che ci consentisse di “apprendere” rapidamente cosa, nel suono degli strumenti ad arco, è importante e cosa meno, privilegiando nelle valutazioni soprattutto il punto di vista musicale. Più precisamente, lo stretto contatto con compositori di musica contemporanea, assieme alla nostra personale vocazione, ci ha indotto a ricercare non tanto gli aspetti “imitativi” del modello, quanto piuttosto quelli “innovativi”: vale a dire la possibilità di esplorare aspetti sonori e musicali non realizzabili o difficilmente realizzabili nella pratica. Il modello è stato in effetti utilizzato, proprio in questa chiave, dal compositore Michelangelo Lupone sia come fonte di suggerimenti compositivi per tecniche strumentali innovative, sia per la composizione del nastro magnetico del quartetto “Corda di metallo” (dal quale il titolo del presente lavoro e del modello), per archi, nastro magnetico e dispositivo di spazializzazione (Kronos Quartett, Roma 1997).

IL MODELLO

La corda

L’equazione della corda libera presa in considerazione è la seguente:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(x,t) = \frac{T}{\mu} \frac{d^2}{dx^2} y(x,t) - S \frac{d}{dt} y(x,t) - S_i \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dt} y(x,t)$$

Con le condizioni al contorno:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

Dove:

- T (Newton) tensione della corda.
- μ (Kg/m) densità lineare della corda.
- S (sec⁻¹) coefficiente che rende conto dell’attrito viscoso con l’aria.
- S_i (m²/sec) coefficiente che rende conto dell’attrito viscoso interno.

Qualche parola di spiegazione sulla presenza e sulla assenza di alcuni termini. L’assenza riguarda il classico termine dispersivo:

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x,t)$$

Questo termine, dovuto alla rigidità (*stiffness*) della corda, provoca come noto una dispersione della velocità di propagazione in funzione della frequenza, a sua volta causa del reciproco allontanamento delle parziali rispetto ai rapporti armonici. Si tratta di un effetto importante dal punto di vista timbrico, tanto più accentuato quanto maggiore è la rigidità della corda, come nel caso ad esempio di quelle della sezione grave del pianoforte. Le corde degli archi hanno bassa rigidità, ma una tradizione di ricerca la ritiene comunque responsabile dello “effetto di arrotondamento” (*rounding effect*), osservabile sperimentalmente. Altri suggeriscono come tale effetto possa essere piuttosto provocato dall’azione dell’archetto, segnatamente dall’isteresi termica nell’attrito della colofonia.

Questo termine è stato fino ad oggi da noi omissso non tanto per difficoltà di implementazione, quanto perché il metodo di integrazione della evoluzione temporale introduce errori di approssimazione il cui effetto è qualitativamente lo stesso.

Qualche parola invece sull'ultimo termine misto, generalmente lasciato più in ombra in letteratura. Esso rappresenta la dissipazione provocata dagli attriti viscosi interni alla corda stessa provocati dall'incurvamento. Questo termine è responsabile di un comportamento di importanza primaria, tipico delle corde "reali", nell'evoluzione della corda libera: la crescente rapidità di smorzamento delle parziali al crescere della loro frequenza. Ad esempio, nella coda di un suono "pizzicato" è udibile quasi esclusivamente la fondamentale, mentre i primi istanti del transitorio sono ricchi di armoniche.

Nel modello qui presentato, l'altezza del suono prodotto è determinata dal parametro T/μ e dalle condizioni al contorno (esattamente dal parametro L). La variazione di altezza del suono prodotto può essere ottenuta quindi in due modi indipendenti: Variando T/μ , oppure la lunghezza L , o entrambi. Il primo caso corrisponde fisicamente a variare la tensione della corda (supponendo μ costante) agendo sul bischero, il secondo a quanto fa normalmente un esecutore diteggiando. In entrambi casi, il sistema non è invariante nel tempo, e pertanto un metodo di integrazione basato su implicite presupposizioni di invarianza introdurrebbe inevitabilmente artefatti nei transitori.

Il metodo di integrazione della evoluzione temporale da noi adottato, alle differenze finite, non presuppone l'invarianza del coefficiente T/μ , il quale pertanto può essere variato dinamicamente. La variazione della lunghezza pone invece problemi più sottili, e richiede di riportare correttamente come condizioni iniziali il raccordo tra le diverse lunghezze. Questo meccanismo richiede approfondimenti e non è stato ancora implementato.

L'eccitazione

L'eccitazione della corda, che non è qui espressa esplicitamente, prende forme diverse a secondo si tratti di corda pizzicata, martellata, o tirata con l'archetto.

In un primo, più semplice approccio, l'eccitazione può essere pensata come una funzione del tempo applicata in un punto definito della corda (ad esempio, una forza applicata, oppure una velocità). In un approccio più realistico deve tenere conto in qualche modo dell'interazione tra "oggetto eccitante" e corda, dipendendo così anche da una o più variabili di stato della corda stessa.

E' il caso dell'implementazione dell'archetto, che non può essere effettuata mediante una semplice funzione di eccitazione, perché esso interagisce in modo profondo con la corda, e introduce quindi, nell'equazione di moto, un termine non lineare, dipendente oltre che dalla eccitazione vera e propria, da variabili di stato della corda. Il sistema che si ottiene combinando eccitatore e corda è dunque insieme non lineare e variabile nel tempo.

Il modello da noi implementato considera come funzioni di eccitazione la pressione e la velocità, e le variabili di stato di legame sono la velocità e l'accelerazione del punto di applicazione. Questo equivale idealmente all'introduzione, a destra della equazione, di un termine del tipo:

$$F\left(v(t), p(t), x_{\beta}(t), \frac{d}{dt}y(x_{\beta}(t), t), x, \sigma(t)\right)$$

dove:

$v(t)$	(m/sec)	velocità dell'archetto
$p(t)$	(Newton)	Pressione dell'archetto
$x_{\beta}(t)$	(m)	Posizione dell'archetto sulla corda
$\sigma(t)$		Variabile booleana che descrive lo stato "stick" o "slip" del punto di contatto corda-archetto.

Spendiamo qualche parola sul meccanismo di funzionamento dell'archetto da noi implementato, che si differenzia dalle usuali curve continue velocità/forza.

Durante la fase di "stick" al punto x_β , la velocità del punto x_β è posta uguale a quella dell'archetto $v(t)$ mediante l'applicazione dell'opportuna componente F dell'accelerazione. Durante la fase di "slip", F esprime la componente di accelerazione del punto (forza/densità lineare) dovuta all'arco e governata da una legge non lineare nella differenza di velocità tra questo e il punto. In entrambi i casi, l'eccitazione è applicata nel solo punto x_β (nell'implementazione attuale, per semplicità, uno degli N punti equidistanti di campionamento spaziale).

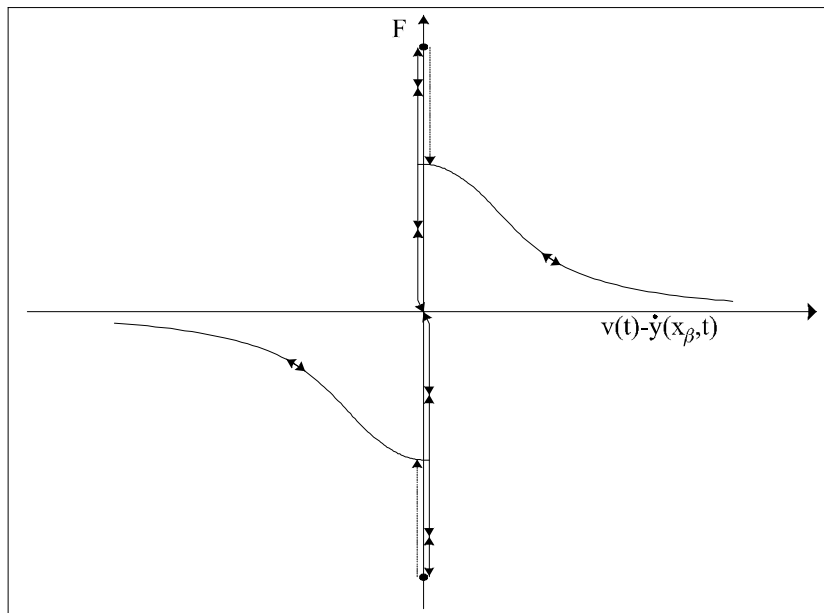


Diagramma di stato del punto di applicazione dell'archetto. In ascisse la differenza di velocità punto-archetto, in ordinata la componente di accelerazione impressa al punto dall'archetto (forza/densità lineare).

Come si vede dal diagramma, la transizione "stick" → "slip" avviene con una soglia pari al doppio di quella "slip" → "stick", la quale ultima a sua volta avviene per velocità relativa zero.

Nell'attuale implementazione, come nei modelli usuali, l'intensità dell'accelerazione applicata e le relative soglie sono scalate linearmente con la pressione dell'archetto. Altri tipi di dipendenze possono essere esplorate.

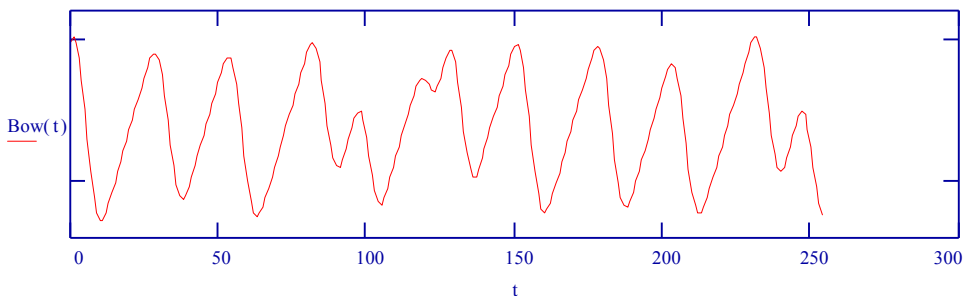
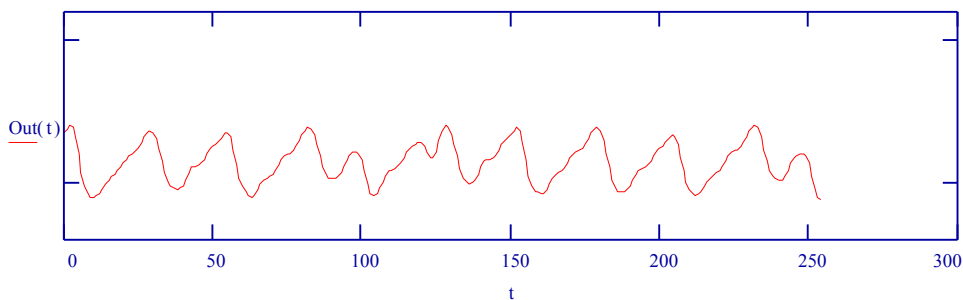
Il meccanismo non tiene esplicitamente in considerazione la variabile "temperatura" del punto, la quale, come noto, influenza le caratteristiche di fluidità e quindi di attrito della colofonia (un polimero naturale dal comportamento tutt'altro che semplice). Tuttavia la soglia sopra citata tiene conto, sia pure solo qualitativamente, del raffreddamento del punto (e della colofonia) durante la fase di "stick".

Il rumore di sfregamento è modellato aggiungendo alla curva rumore bianco di semidisersione pari, in ogni punto, al valore dell'accelerazione stessa. In questo modo non si ottiene solo "rumore aggiunto" di intensità proporzionale alla pressione, ma anche un comportamento dell'archetto di tipo stocastico, responsabile di comportamenti microcaotici della corda. Abbiamo dunque, in questo modo, un modello del rumore.

Il suono

Il suono è prelevato come segnale di posizione del punto della corda più vicino al ponticello. Si tratta di un modo semplice di approssimare la funzione di sforzo esercitata dalla corda sul vincolo (proporzionale alla derivata prima spaziale della corda nell'origine). Sono implementabili senza molte difficoltà, anche se con costo di calcolo, altre soluzioni più "rigorose" (che tengano conto ad esempio dell'ammortamento del ponticello).

Le forme d'onda presentano i tipici andamenti a dente di sega. Diamo qui un esempio dell'andamento della posizione della corda nel punto di applicazione dell'archetto (Bow) e nel punto di uscita (Out). Il tempo è in campioni a 44.1 KHz.



IL METODO DI CALCOLO

Il metodo di calcolo, per l'integrazione nella variabile spaziale, può essere considerato simile a quello agli elementi finiti (nel senso che si basa sullo sviluppo della funzione incognita in serie di funzioni ortonormali), mentre quello adottato per l'integrazione dell'evoluzione temporale del sistema è un metodo alle differenze finite.

La forma istantanea nello spazio è sviluppata come serie di funzioni armoniche, arrestate ad un indice N , che esprimerà la massima frequenza spaziale ammissibile per la corda. Questa frequenza massima spaziale è correlata, ovviamente, al numero di parziali ottenibili e, nel caso di evoluzione libera, sarà proprio pari a queste. N dovrà quindi essere scelto in funzione della banda passante desiderata, considerando che la complessità dell'algoritmo è necessariamente crescente con N .

Fissato il numero di armoniche dello sviluppo, in un determinato istante è possibile rappresentare la posizione della corda nel continuo mediante un numero finito (e pari a N) di campioni della sua posizione.

Siano questi

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N)$$

Da essi è possibile ricavare i coefficienti dello sviluppo in serie (ad esempio, eseguendone una DFT). Ottenuti i coefficienti dello sviluppo, la posizione della corda nello spazio è conosciuta analiticamente (in tutto l'intervallo 0-L, non solo nei punti di campionamento). La conoscenza analitica permette a questo punto di calcolare anche le proprietà differenziali in tutto l'intervallo 0-L, e in particolare, è possibile calcolare formalmente le curvatures (derivate seconde spaziali) su ognuno dei punti di campionamento:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x_1), \frac{d^2}{dx^2} y(x_2) \dots \frac{d^2}{dx^2} y(x_N)$$

Senza esporre tediosi passaggi, il calcolo delle curvatures si riduce di fatto al prodotto di una matrice costante per il vettore y delle posizioni.

L'equazione della corda, discretizzata spazialmente negli N punti, può a questo punto spezzarsi in N equazioni di moto (del secondo ordine) dei singoli punti, nelle quali è ottenibile il termine a sinistra (accelerazione), a partire dalla curvatura (ormai nota) e dalle velocità (che compaiono nel termine di smorzamento viscoso con l'aria) e dalla variazione nel tempo della curvatura stessa (termine di smorzamento viscoso interno).

La velocità è ottenibile per integrazione dell'accelerazione, mentre per la variazione temporale delle derivate seconde, occorre memorizzare quelle relative all'istante precedente, e sostituire la derivata con la relativa differenza finita.

La conoscenza dell'accelerazione permette, a questo punto, mediante integrazione, il calcolo della successiva posizione e velocità, e il ciclo di calcolo può ricominciare.

Questo meccanismo di integrazione nel tempo introduce un errore che ha come conseguenza l'allargamento delle righe dello spettro. Le parziali si trovano cioè a rapporti sovrarmonici, un effetto simile a quello introdotto dalla rigidità della corda. Per ridurre l'effetto, è stato introdotto un opportuno sovracampionamento.

RISULTATI OTTENUTI

Il modello è stato provato ampiamente, e utilizzato, per $N = 16$, con un sovracampionamento di un fattore 4.

Sono stati implementati modelli semplici di pizzico e percussione, che hanno dato risultati molto soddisfacenti sotto l'aspetto imitativo.

Prove "imitative" delle emissioni sonore degli strumenti reali ad arco hanno dato risultati incoraggianti per piccole variazioni dell'altezza del suono, particolarmente per quanto riguarda i transitori di attacco dell'archetto e l'evoluzione di suoni prolungati. Inoltre, i suoni generati con il modello approssimano auditivamente bene quelli reali in intervalli di pressione, velocità e posizione anche al di fuori delle normali condizioni di esecuzione.

L'esecuzione di frasi, indipendentemente dal tipo di articolazione, richiede la corretta soluzione del problema della variazione della lunghezza della corda L , parametro che definisce una condizione al contorno.

Variazioni dell'altezza ottenute con la variazione della tensione sono già oggi possibili, ma i transitori così ottenuti sono ovviamente differenti da quelli ottenuti per variazione della lunghezza.

LE LINEE DI RICERCA

Il lavoro fino ad oggi svolto non può essere considerato che un punto di partenza. Numerose sono le direzioni di indagine, sia sul piano del miglioramento del modello - per rendere conto di aspetti musicalmente importanti che attualmente non sono modellati - sia sul piano dell'aumento dell'efficienza e della precisione dell'algoritmo di calcolo.

Il modello

La prima caratteristica che deve essere implementata è la possibilità di variare dinamicamente la lunghezza della corda, invece di variare la tensione, per ottenere la variazione di altezza dei suoni.

Molti indizi suggeriscono inoltre come necessario un maggiore, o forse più correttamente simulato, effetto di arrotondamento. Le direzioni su cui indagare sono due: introduzione del termine di rigidità della corda o, più probabilmente, il miglioramento della simulazione dell'isteresi termica della colofonia. E' possibile, e nel modello attuale di non difficile implementazione, introdurre come variabile di stato la temperatura del punto di contatto e la corretta dipendenza da essa del coefficiente di attrito della colofonia.

Indagini vanno effettuate inoltre sul comportamento dei punti di vincolo: da un lato, il dito della mano sinistra, con le sue caratteristiche di smorzamento. Dall'altro, il ponticello, che ha una ammettenza complessa la cui importanza dal punto di vista timbrico e della dinamica della corda non ci è ad oggi del tutto chiara.

Sarebbe inoltre possibile ottenere, ad un prezzo computazionale non trascurabile, ma forse compensabile con tecniche più efficienti di calcolo (vedi nel seguito), una variabilità nel continuo del punto di applicazione dell'archetto, oggi vincolato ad essere uno dei punti di campionamento spaziale. La dimensione finita dell'archetto può inoltre essere forse modellata considerando che, in fase di "stick", essa produce di fatto un accorciamento della corda stessa, ovvero applicandolo ad una coppia di punti adiacenti.

Miglioramenti possono essere conseguiti sulle caratteristiche spettrali, oggi "piatte", del rumore di sfregamento dell'arco, che nella realtà è dipendente dalla velocità (si tratta presumibilmente di un rumore spaziale non bianco, centrato attorno ad una frequenza, riportato nel tempo attraverso la velocità).

L'algoritmo

La complessità attuale è $O(N^2*S)$, dove N è il numero dei punti di campionamento spaziale e S è il fattore di sovracampionamento temporale. Questo dato presuppone l'invariabilità nel tempo dei punti di campionamento spaziale.

L'algoritmo viene elaborato attualmente in circa il doppio del tempo reale su un Pentium® 133, con $N=16$ e $S=4$.

Approcci diversi, basati su algoritmi veloci di tipo FFT potrebbero portare ad una complessità del tipo $O(N*\ln(N)*S)$, o anche meglio. Sono in corso indagini nella direzione degli algoritmi di Winograd, che imporrebbero la scelta di N tra i numeri primi, limitazione questa peraltro del tutto accettabile nello specifico contesto.

L'individuazione di un algoritmo rapido di calcolo della DFT (es. FFT) per campionamento non equispaziato, e che possa essere eseguito in tempo reale, per lo sviluppo in serie di armoniche spaziali (e la conseguente antitrasformazione dello spettro moltiplicato per ω^2 per ottenere le curvature nei punti) permetterebbe un agevole "passaggio al continuo" oltre che della posizione dell'archetto (con possibilità di modellarne sia la posizione (β) che la sua larghezza, impartendo l'eccitazione sui due punti estremali) anche di quella di eventuali punti di smorzamento (es. deteggiamenti leggeri, per la produzione di armonici, o per tecniche di variazione della lunghezza).

Riguardo all'integrazione nel tempo, è allo studio l'individuazione di metodi a convergenza accelerata, per ridurre il fattore di sovracampionamento e l'errore di approssimazione. Direzioni possibili sono il metodo quali Runge-Kutta, o a predizione-correzione (Hamming {9}), di ordine 4, che pertanto conducono ad un errore proporzionale a $(\Delta t)^5$, ove Δt è il tempo di campionamento. Con essi sarebbe forse possibile giungere a $S=2$ o addirittura $S=1$, con una riduzione del tempo di calcolo, a parità di altre condizioni, di un fattore due o quattro, consentendo da soli già oggi il tempo reale.

L'algoritmo è inoltre ben parallelizzabile, se si adotta la topologia opportuna. In un sistema multiprocessore potrebbe quindi, anche a breve, risultare possibile una polifonia realistica (due-quattro voci).

CONCLUSIONI

In questo come in altri campi, la valutazione di quali siano le direzioni di ricerca interessanti dipende fortemente dagli obiettivi che ci si prefigge.

Se si assume come scopo della simulazione per modelli fisici la buona imitazione degli strumenti reali, è probabilmente abbastanza chiaro in che modo vadano misurati i risultati ottenuti. Se invece ci si pone come obiettivo quello di fornire un mezzo di sintesi di nuovi suoni più facilmente controllabile, e insieme più stimolante, rispetto ad altri metodi, i criteri di valutazione diventano più complessi, e, in ultima analisi, dipendenti da valutazioni di ordine strettamente musicale.

In questo quadro, l'imitazione degli strumenti reali acquista una importanza solo mediata, indiretta. Essa continua a fungere da guida per verificare la correttezza delle ipotesi e dei metodi messi in campo, ma non è più, in sé e per sé, un obiettivo interessante.

Se ci si mette dal punto di vista della produzione musicale contemporanea, possono risultare più importanti la modellazione e l'implementazione di caratteristiche e comportamenti fisicamente irrealizzabili (e quindi, "inverificabili"), ma musicalmente ed espressivamente interessanti.

Se si assume, come noi facciamo, quest'ottica, la chiave dell'evoluzione delle ricerche è inevitabilmente più nelle mani di musicisti e compositori, che dei ricercatori del settore. Appare dunque chiaro come una ricerca siffatta non possa inevitabilmente che svolgersi attraverso uno stretto e reciproco rapporto critico tra ricercatori e musicisti.

BIBLIOGRAFIA

- Woodhouse, J. 1992. "Physical Modeling of Bowed Strings." *CMJ*, 16,4, pp. 43-56
- Smith, J.O. III 1996. "Discrete Time Modeling of Acoustic Systems with Applications to Sound Synthesis of Musical Instruments." *Proceedings of the Nordic Acoustical Meeting*, Helsinki, June 12-14 (<http://www.hut.fi/TKK/Akustiikka/aku/man96/>)
- Smith, J.O. III 1996. "Physical Modeling Synthesis Update." *CMJ*, 20,2, Summer 1996 pp.44-56
- Borin, G., De Poli, G, Sarti, A. 1992. "Algorithms and Structures for Synthesis Using Physical Models." *CMJ*, 16,4 Winter 1992
- Karplus, K., Strong, A. 1983. "Digital Synthesis of Plucked String and Drum Timbres." *CMJ* 7,2 pp.43-55
- Jaffe, D.A., Smith, J.O. III 1983. "Extension of the Karplus-Strong Plucked-String Algorithm." *CMJ* 7,2 Summer 1983
- Chafe, C. 1989 "Simulating Performance on a Bowed Instrument." *Current Directions in Computer Music Research* - Edited by Mew, M. and Pierce, J. MIT Press 1989

CORDA DI METALLO

Marco Palumbi, Lorenzo Seno (CRM).

- Fletcher, N., Rossing, T.D., 1988. "The Physics of Musical Instruments." Springer, N.Y. ISBN 0-387-94151-7 ISBN 3-540-94151-7
- Hutton, D.V., 1981. "Applied Mechanical Vibrations." McGraw-Hill 1981. ISBN 0-07-031549-3
- Olson, H.F., 1952. "Music, Physics and Engineering." Dover 1967
- Johnson, C., 1990. "Numerical solution of partial differential equations by finite element method." Cambridge University Press ISBN 0 521 345 146 ISBN 0 521 347 580.
- Boyden, D.D., Monosoff, S., Schwarz, B., Marx, K., Slatford, R., Hutchins, C.M., et al. 1980. "Gli archi" Ricordi 1995 ISBN 88-7592-417-1 (Titolo originale: "The Violin family" Macmillan Press).
- Chassery, J.M. 1991. "Transformation de Fourier discrète. Definition et aspects algorithmiques" in Baranger, J. "Analyse Numerique" Hermann. ISBN 2 7056 6093 2. Pp. 459-514
- Florensm J-L., Cadoz, C. 1991. "The Physical Model: Modeling and Simulating the Instrumental Universe" *Representation of Musical Signals* edited by De Poli, G., Piccialli, A., Roads, G. MIT Press ISBN 0-262-04113-8 (hc) pp.227-268.
- Adrien, J-M., 1991. "The Missing Link: Modal Synthesis" *Representation of Musical Signals* edited by De Poli, G., Piccialli, A., Roads, G. MIT Press ISBN 0-262-04113-8 (hc) pp.269-297
- Selesnick, I.W., Sidney Burrus C., 1994. "Extending Winograd's Small Convolution Algorithm to Longer Lengths" *ISCAS Proceedings 1994*
- Selesnick, I.W., Sidney Burrus C., 1995. "Automatic Generation of Prime Length FFT Programs" *IEEE Transactions on Signal Processing*.